

УДК 517.5

О нижнем порядке отображений с конечным искажением длины

Севостьянов Е.А.

22 мая 2014 г.

Аннотация

В настоящей работе изучается вопрос о так называемом нижнем порядке для одного подвида отображений с конечным искажением, активно изучаемых последние 15–20 лет. Доказано, что отображения с конечным искажением длины $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, внешняя дилатация которых локально суммируема в степени $\alpha > n - 1$ и имеющие конечный асимптотический предел, имеют равномерно ограниченный снизу нижний порядок.

Ключевые слова: отображения с ограниченным и конечным искажением, рост отображения на бесконечности, открытые дискретные отображения, ёмкости конденсаторов

Key words: mappings of finite and bounded distortion, growth of a mapping at infinity, open discrete mappings

1 Введение

Нижний порядок отображений, как известно, играет существенную роль при доказательстве некоторых аналогов теоремы Пикара, а также в теории распределения значений (см., напр., [1], [2] и [3]). Настоящая заметка посвящена изучению отображений с конечным искажением, активно изучаемых в последнее время (см., напр., [4], [5]–[6] и [7]). Здесь исследуется вопрос об ограниченности снизу нижнего порядка отображений с конечным искажением длины, введённых О. Мартио, В. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым [5]–[6].

В сравнительно недавней работе К. Райала [3] было установлено, что отображения с конечным искажением, определённые во всём пространстве

\mathbb{R}^n , $n \geq 2$, при соответствующих ограничениях на так называемый нижний порядок отображения (поведение отображения на бесконечности), а также требованиях на внешнюю дилатацию, обладают некоторыми заслуживающими внимания свойствами. (Определение и примеры отображений с конечным искажением могут быть найдены в монографии [4]). Говоря точнее, в работе [3] было показано, что указанные отображения имеют ограниченный снизу нижний порядок, т.е., ограничена снизу некоторая величина, отвечающая за рост отображения. Отметим, что подобный результат обобщает классическую теорему Рикмана–Вуоринена, относящуюся к классу отображений с ограниченным искажением ([1]).

В настоящей статье устанавливается некоторый аналог результатов работы [3] для так называемых отображений с конечным искажением длины ([5, гл. 8]) при несколько иных предположениях на их внешнюю дилатацию. При этом, соответствующие примеры, приведённые в последнем разделе, показывают, что указанные условия принципиально отличаются от ограничений из работы [3]. Отображения с конечным искажением длины введены О. Мартио совместно с В. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым ([6]) и представляют собой одно из обобщений отображений с ограниченным искажением по Решетняку (см. [8] и [2]). Они могут быть определены как отображения, искажающие евклидово расстояние в конечное число раз в почти всех точках, а также обладающие N -свойством Лузина относительно меры Лебега в \mathbb{R}^n и меры длины на кривых в прямую и обратную стороны (см. там же).

Всюду далее D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, m – мера Лебега \mathbb{R}^n , $\text{dist}(A, B)$ – евклидово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $\text{dist}(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} |x - y|$, (x, y) обозначает (стандартное) скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\text{diam } A$ – евклидов диаметр множества $A \subset \mathbb{R}^n$, $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$, $\mathbb{B}^n := B(0, 1)$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $\mathbb{S}^{n-1} := S(0, 1)$, ω_{n-1} означает площадь сферы \mathbb{S}^{n-1} в \mathbb{R}^n , Ω_n – объём единичного шара \mathbb{B}^n в \mathbb{R}^n , запись $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f , заданное в области D , непрерывно. *Кривой* γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ (открытого интервала (a, b) , либо полуоткрытого интервала вида $[a, b)$ или $(a, b]$) в \mathbb{R}^n , $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ , а $f(\Gamma) = \{f \circ \gamma | \gamma \in \Gamma\}$. Далее символ $\Gamma(E, F, D)$ означает семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в D , т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Следующие определения могут быть найдены, напр., в разд. 1–6 гл. I в [9]. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в \mathbb{R}^n , если криволинейный интеграл первого рода от функции ρ

по каждой (локально спрямляемой) кривой $\gamma \in \Gamma$ удовлетворяет условию $\int \rho(x)|dx| \geq 1$. В этом случае мы пишем: $\rho \in \text{adm} \Gamma$. Модулем семейства γ кривых Γ называется величина $M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm} \Gamma} \int_D \rho^n(x) dm(x)$. Свойства модуля в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега m в \mathbb{R}^n (см. [9, теорема 6.2]). Пусть $Q(x) : D \rightarrow [0, +\infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Для произвольного семейства кривых Γ величина $M_Q(\Gamma)$, называемая *модулем семейства Γ с весом Q* , может быть определена соотношением $M_Q(\Gamma) := \inf_{\rho \in \text{adm} \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} Q(x) \cdot \rho^n(x) dm(x)$. Полагаем

$$L(x, \varphi) = \limsup_{y \rightarrow x, y \in E} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|y - x|}, \quad l(x, \varphi) = \liminf_{y \rightarrow x, y \in E} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|y - x|}.$$

Определим функции длины, связанные с отображением на кривых (см. [5] и [6]). Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}$ – открытый интервал числовой прямой, $\gamma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ – локально спрямляемая кривая. В таком случае, очевидно, существует единственная неубывающая функция длины $l_\gamma : \Delta \rightarrow \Delta_\gamma \subset \mathbb{R}$ с условием $l_\gamma(t_0) = 0$, $t_0 \in \Delta$, такая что значение $l_\gamma(t)$ равно длине подкривой $\gamma|_{[t_0, t]}$ кривой γ , если $t > t_0$, и длине подкривой $\gamma|_{[t, t_0]}$ со знаком “–”, если $t < t_0$, $t \in \Delta$. Пусть $g : |\gamma| \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение, где $|\gamma| = \gamma(\Delta) \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что кривая $\tilde{\gamma} = g \circ \gamma$ также локально спрямляема. Тогда, очевидно, существует единственная неубывающая функция $L_{\gamma, g} : \Delta_\gamma \rightarrow \Delta_{\tilde{\gamma}}$ такая, что $L_{\gamma, g}(l_\gamma(t)) = l_{\tilde{\gamma}}(t)$ при всех $t \in \Delta$. Согласно [5, гл. 8] (см. также [6]), отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ будем называть *отображением с конечным искажением длины* (пишем: $f \in FLD$), если f обладает N -свойством Лузина, для п.в. $x \in D$ $0 < l(x, f) \leq L(x, f) < \infty$ и, кроме того, выполнены следующие условия:

(L_1) для п.в. кривых $\gamma \in D$ кривая $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ локально спрямляема и функция $L_{\gamma, f}$ обладает N -свойством;

(L_2) для п.в. кривых $\tilde{\gamma} \in f(D)$ каждое поднятие γ кривой $\tilde{\gamma}$ локально спрямляемо и функция $L_{\gamma, f}$ обладает N^{-1} -свойством.

Здесь далее кривая $\gamma \in D$ называется (*полным*) *поднятием кривой $\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ при отображении $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$* , если $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$. Говорят, что некоторое свойство выполнено для *почти всех (п.в.) кривых* области D , если оно имеет место для всех кривых, лежащих в D , кроме некоторого их семейства, модуль которого равен нулю.

Замечание 1. Согласно [5, следствие 8.1], см. также [6, следствие 3.14], отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит классу отображений с конечным искажением длины тогда и только тогда, когда f дифференцируемо почти

всюду, обладает N и N^{-1} -свойствами и, кроме того, выполнены условия (L_1) и (L_2) . В свою очередь, для дискретных открытых отображений условия (L_1) и (L_2) эквивалентны локальной абсолютной непрерывности функции длины $L_{\gamma, f}$, соответственно, в прямую и обратную стороны (что записывают в виде $f \in ACP$ и $f \in ACP^{-1}$, см. напр., [5, предложение 8.5]).

Полагаем $M_f(r) = \sup_{x \in B(0, r)} |f(x)|$. Согласно [1], *нижним порядком* отображения $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ будем называть величину

$$\lambda_f := \liminf_{r \rightarrow \infty} (n-1) \frac{\log \log M_f(r)}{\log r}$$

(см. также [3]). Если $\lambda_f > 0$, то будем говорить, что f имеет положительный нижний порядок.

Напомним, что элемент $b \in \mathbb{R}^n$ называется *асимптотическим пределом* отображения f в бесконечно удалённой точке, если найдётся кривая $\gamma : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что $\lim_{t \rightarrow 1-0} \gamma(t) = \infty$ и $\lim_{t \rightarrow 1-0} f(\gamma(t)) = b$.

Как обычно, для дифференцируемого в точке $x_0 \in D$ отображения $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ символ $f'(x_0)$ обозначает матрицу Якоби отображения f в точке x_0 , а $J(x_0, f)$ — якобиан отображения f в точке x_0 . Полагаем $\|f'(x)\| = \max_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$. *Внешняя дилатация* $K_O(x, f)$ (дифференцируемого) отображения f в точке x определяется соотношением

$$K_O(x, f) = \begin{cases} \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x, f)|}, & J(x, f) \neq 0, \\ 1, & f'(x) = 0, \\ \infty, & \text{в остальных случаях} \end{cases}.$$

Для произвольной измеримой по Лебегу функции $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ полагаем

$$q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{|x-x_0|=r} Q(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x). \quad (1)$$

Одним из главных результатов настоящей работы является утверждение, приведённое ниже. Его аналог доказан в статье [3, теорема 1.3] для отображений с конечным искажением, внешняя дилатация которого удовлетворяет некоторым условиям экспоненциального роста. (По этому поводу см. также классический случай отображений с ограниченным искажением, рассмотренный С. Рикманом и М. Вуориненом [1]).

Теорема 1. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение с конечным искажением длины. Предположим, что:

1) внешняя дилатация $K_O(x, f)$ отображения f при почти всех x удовлетворяет условию: $K_O(x, f) \leq Q(x) \in L_{loc}^\alpha(\mathbb{R}^n)$, где $\alpha > n - 1$ – некоторое фиксированное число;

2) найдётся $R_0 > 0$ такое, что

$$\frac{1}{m(B(0, t))} \int_{B(0, t)} Q^\alpha(x) dm(x) \leq A \quad (2)$$

для некоторого $A < \infty$ и всех $t \geq R_0$;

3) при $K \rightarrow \infty$

$$\int_r^{Kr} \frac{d\omega}{\omega \tilde{q}_0^{\frac{1}{n-1}}(\omega)} \rightarrow \infty \quad (3)$$

равномерно по $r > R_0$, где $\tilde{q}_0(\omega)$ обозначает среднее значение функции Q^{n-1} над сферой $S(0, \omega)$.

Тогда, если отображение f имеет асимптотический предел $a \in \mathbb{R}^n$ в бесконечно удалённой точке, то его нижний порядок λ_f удовлетворяет условию

$$\lambda_f > M = M(n, Q) > 0,$$

где число M зависит только от размерности пространства n и функции Q .

Следствие 1. Заключение теоремы 1 остаётся выполненным, если вместо условий (2) и (3) выполнено условие: $q_{\alpha,0}(r) \leq C$ при всех $r \geq R_0$ и некотором $R_0 \geq 1$, где $q_{\alpha,0}(r)$ – среднее значение функции $Q^\alpha(x)$ по сфере $S(0, r)$, $\alpha > n - 1$.

Поскольку отображения класса $W_{loc}^{1,n}$, мера множества точек ветвления которых равна нулю, для которых $K_O(x, f) \in L_{loc}^\alpha$, $\alpha > n - 1$, являются открытыми и дискретными (см. [10]–[11]), а также – отображениями с конечным искажением длины (см. [12, теорема 1 и следствие 1]), имеем также следующее важнейшее

Следствие 2. Заключение теоремы 1 остаётся выполненным, если в условиях этой теоремы f является отображением класса $W_{loc}^{1,n}$, мера множества точек ветвления которого равна нулю.

В частности, из теоремы 1 следует классический результат Рикмана–Вуоринена о положительности и равномерной ограниченности снизу нижнего порядка отображений с ограниченным искажением [1].

2 Предварительные сведения

Для борелевского множества $A \subset \mathbb{R}^n$ определим *функцию кратности* $N(y, f, A)$ как число прообразов точки y во множестве A , т.е.

$$N(y, f, A) = \text{card} \{x \in E : f(x) = y\}, \quad N(f, E) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} N(y, f, E).$$

Заметим, что функция $N(y, f, A)$ является измеримой по Лебегу (см., напр., [13, теорема IV.1.2]). Следующий результат представляет собой незначительное усиление одного из классических модульных неравенств для отображений с ограниченным искажением (см. [2, теорема 2.4, гл. II]).

Теорема 2. Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – отображение с конечным искажением длины, $Q : D \rightarrow [1, \infty]$ – некоторая измеримая по Лебегу функция, такая что $K_O(x, f) \leq Q(x)$ почти всюду, Γ – фиксированное семейство кривых в D и $\rho \in \text{adm } f(\Gamma)$. Тогда

$$M_{1/Q}(\Gamma) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho^n(y) N(y, f, A) dm(y).$$

Доказательство. Пусть $\rho' \in \text{adm } f(\Gamma)$, тогда определим функцию ρ полагая $\rho(x) = \rho'(f(x)) \|f'(x)\|$ при $x \in A$ и $\rho(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Пусть Γ_0 – семейство всех локально спрямляемых кривых семейства Γ , на которых f локально абсолютно непрерывно, тогда учитывая определение отображений с конечным искажением длины и замечание 1, мы получим: $M(\Gamma) = M(\Gamma_0)$. (Отсюда, в частности, вытекает, что также $M_{1/Q}(\Gamma) = M_{1/Q}(\Gamma_0)$). В таком случае, виду [2, лемма 2.2, гл. II], $\int_{\gamma} \rho(x) |dx| = \int_{\gamma} \rho'(f(x)) \|f'(x)\| |dx| \geq \int_{f \circ \gamma} \rho'(y) |dy| \geq 1$, следовательно, $\rho \in \text{adm } \Gamma_0$. Учитывая для произвольного отображения с конечным искажением длины возможность замены переменной (см., напр., [5, предложение 8.3], см. также [6, предложение 3.7]), мы будем иметь:

$$\begin{aligned} M_{1/Q}(\Gamma) &= M_{1/Q}(\Gamma_0) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho^n(x)}{Q(x)} dm(x) = \int_A \frac{\rho'^n(f(x)) \|f'(x)\|^n}{Q(x)} dm(x) \leq \\ &\leq \int_A \rho'^n(f(x)) |J(x, f)| dm(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho^n(y) N(y, f, A) dm(y). \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Пусть $S(a, r)$ – произвольная сфера, тогда для числа $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, и семейства кривых Γ , имеющих носитель, лежащий на сфере $S(a, r)$, определим модуль семейства кривых порядка p относительно $S(a, r)$ равенством

$M_p^S(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{S(a,r)} \rho^p(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x)$, где, как обычно, \mathcal{H}^{n-1} – $(n-1)$ -мерная мера Хаусдорфа. Хорошо известно (см. [14, теорема 3, с. 514]), что, каковы бы не были множества $E_1, E_2 \subset S(a, r)$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, при $n-1 < p < n$ и $p > n$ всегда

$$M_p^S(\Gamma(E_1, E_2, S(a, r))) \geq \frac{C_{p,n}}{r^{p+1-n}}, \quad (4)$$

где $C_{p,n}$ – некоторая постоянная, зависящая от размерности пространства n и выбранного числа p . Справедлив следующий результат.

Теорема 3. Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – отображение с конечным искажением длины и $0 < c_1 < c_2 < \infty$ – некоторые фиксированные числа. Пусть также $Q : D \rightarrow [1, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция такая, что $K_O(x, f) \leq Q(x)$ при почти всех $x \in D$, при этом, $Q \in L_{loc}^\alpha(D)$ при некотором фиксированном $\alpha > n-1$. Предположим, что E и F – пара множеств, удовлетворяющих условию $E \cap S(a, r) \neq \emptyset \neq F \cap S(a, r)$ при всех $r \in (c_1, c_2)$. Обозначим $\Delta := \Gamma(E, F, B(a, c_2) \setminus \overline{B(a, c_1)})$. Тогда

$$M_{1/Q}(\Delta) \geq \frac{C_{n,\alpha}}{\left(\frac{c_2^n}{c_2^n - c_1^n} \cdot \left(\frac{1}{c_2^n - c_1^n} \int_{B(a, c_2) \setminus B(a, c_1)} Q^\alpha(x) dm(x) \right) \right)^{1/\alpha}}, \quad (5)$$

где $C_{n,\alpha}$ – некоторая постоянная, зависящая только от n и α .

Доказательство. Выберем $\rho \in \text{adm } \Gamma(E, F, B(a, c_2) \setminus \overline{B(a, c_1)})$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\int_D \frac{\rho^n(x)}{Q(x)} dm(x) < \infty$ и $E \cap F = \emptyset$. Пусть α – положительное число из условия теоремы, тогда полагаем $p := \frac{\alpha n}{1+\alpha}$. Заметим, что, в этом случае, число p удовлетворяет условию: $p \in (n-1, n)$. Ввиду соотношения (4) получаем, что

$$\int_{S(a,r)} \rho^p(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \geq M_p^S(\Gamma^r) \geq \frac{C_{p,n}}{r^{p+1-n}}, \quad (6)$$

где $\Gamma^r = \{\gamma \in \Gamma(E, F, B(a, c_2) \setminus \overline{B(a, c_1)}) : |\gamma| \in S(a, r)\}$. Из (6) получаем неравенство

$$1 \leq \widetilde{C_{p,n}} \cdot r \left(r^{1-n} \int_{S(a,r)} \rho^p(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \right)^{1/p}. \quad (7)$$

Покажем теперь, что при некотором $r \in (c_1, c_2)$ и $K > n$ выполнено неравенство

$$\left(r^{1-n} \int_{S(a,r)} \rho^p(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \right)^{1/p} \leq K \cdot \left(\frac{1}{c_2^n - c_1^n} \int_{B(a,c_2) \setminus B(a,c_1)} \rho^p(x) dm(x) \right)^{1/p}. \quad (8)$$

Действительно, если $\int_{B(a,c_2) \setminus \overline{B(a,c_1)}} \rho^p(x) dm(x) = \infty$ доказывать нечего, а если

$$\int_{B(a,c_2) \setminus \overline{B(a,c_1)}} \rho^p(x) dm(x) = 0,$$

то и $\int_{S(a,r)} \rho^p(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = 0$ на почти всех сферах. Пусть теперь

$$0 < \int_{B(a,c_2) \setminus \overline{B(a,c_1)}} \rho^p(x) dm(x) < \infty.$$

Предположим противное, а именно, что соотношение (8) нарушено при всех $r \in (c_1, c_2)$, тогда также

$$r^{1-n} \int_{S(a,r)} \rho^p(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \geq K^p \cdot \frac{1}{(c_2^n - c_1^n)} \int_{B(a,c_2) \setminus B(a,c_1)} \rho^p(x) dm(x) \quad (9)$$

при всех $r \in (c_1, c_2)$. Интегрируя соотношение (9) по $r \in (c_1, c_2)$, ввиду теоремы Фубини мы приходим к противоречию, которое и доказывает соотношение (8). Далее, применяя неравенство Гёльдера при $p := \frac{\alpha n}{1+\alpha}$ и полагая $A := \frac{1}{c_2^n - c_1^n}$, получаем:

$$\begin{aligned} & \left(A \int_{B(a,c_2) \setminus B(a,c_1)} \rho^p(x) dm(x) \right)^{1/p} \leq \\ & \leq \left(A \int_{B(a,c_2) \setminus B(a,c_1)} \frac{\rho^n(x)}{Q(x)} dm(x) \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(A \int_{B(a,c_2) \setminus B(a,c_1)} Q^\alpha(x) dm(x) \right)^{\frac{n-p}{pn}}. \end{aligned}$$

Объединяя соотношения (7) и (8) вместе с последним соотношением и учитывая, что в сделанных предположениях $r \leq c_2$, мы получим соотношение

(5) при некоторой постоянной $\tilde{C}_{n,p}$, зависящей только от n и p ; однако, p само полностью определяется по n и α , так что в (5) можно заменить $\tilde{C}_{n,p}$ на $C_{n,\alpha}$, что и требовалось установить. \square

Следующее определение играет важную роль при исследовании отображений (см. [2, разд. 3, гл. II]). Пусть x_1, \dots, x_k — k различных точек множества $f^{-1}(\beta(a))$ и $\tilde{m} = \sum_{i=1}^k i(x_i, f)$. Кривая $\alpha : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ будет называться (частичным) *поднятием* кривой $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с началом в точке x , $c \leq b$, если $\alpha(a) = x$ и $f \circ \alpha(t) = \beta(t)$ при $t \in [a, c]$. Приведённое определение распространяется также на кривые, заданные на каком-либо полуоткрытом интервале.

Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — отображение, $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — некоторая кривая и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Кривая $\alpha : [a, c] \rightarrow D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x , если (1) $\alpha(a) = x$; (2) $f \circ \alpha = \beta|_{[a,c]}$; (3) если $c < c' \leq b$, то не существует кривой $\alpha' : [a, c'] \rightarrow D$, такой что $\alpha = \alpha'|_{[a,c]}$ и $f \circ \alpha = \beta|_{[a,c']}$. Последовательность кривых $\alpha_1, \dots, \alpha_{\tilde{m}}$ будет называться *максимальной последовательностью поднятий кривой β при отображении f с началом в точках x_1, \dots, x_k* , если (a) каждая кривая α_j является максимальным поднятием кривой β при отображении f , (b) $\text{card} \{j : \alpha_j(a) = x_i\} = i(x_i, f)$, $1 \leq i \leq k$, (c) $\text{card} \{j : \alpha_j(t) = x\} \leq i(x, f)$ при всех $x \in D$ и всех $t \in I_j$, где I_j — область определения кривой α_j . Кривые $\alpha_1, \dots, \alpha_{\tilde{m}}$ будем называть *существенно отделимыми*, если из указанных выше условий выполнено только одно условие (c). Отметим, что последовательности существенно отделимых максимальных поднятий с началом в фиксированных точках (в частности — какое-либо одно максимальное поднятие) при открытых дискретных отображениях всегда существуют (см. [2, теорема 3.2, гл. II]).

Здесь и далее $l(f'(x)) = \min_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$. Внутренняя дилатация $K_I(x, f)$ отображения f в точке x определяется равенством

$$K_I(x, f) = \begin{cases} \frac{|J(x, f)|}{l(f'(x))^n}, & J(x, f) \neq 0, \\ 1, & f'(x) = 0, \\ \infty, & \text{в остальных случаях} \end{cases}.$$

Как известно,

$$K_I(x, f) \leq K_O^{n-1}(x, f), \quad K_O(x, f) \leq K_I^{n-1}(x, f) \quad (10)$$

(см. [8, соотношения (2.7) и (2.8), п. 2.1, гл. I]), и что $K_I(x, f) \geq 1$ и $K_O(x, f) \geq 1$ всюду, где эти величины определены. Напомним ещё один

необходимый нам результат, доказанный ранее автором (см., напр., [15, теорема 3.1]).

Предложение 1. Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – открытое дискретное отображение с конечным искажением длины, Γ – семейство кривых в D , Γ' – семейство кривых в \mathbb{R}^n и m – натуральное число, такое что выполнено следующее условие. Для каждой кривой $\beta \in \Gamma'$ найдутся кривые $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ семейства Γ такие что $f \circ \alpha_j \subset \beta$ для всех j и равенство $\alpha_j(t) = x$ имеет место при всех $x \in D$, всех t и не более чем $i(x, f)$ индексах j . Тогда $M(\Gamma') \leq \frac{1}{m} \int_D K_I(x, f) \cdot \rho^n(x) dm(x)$ для каждой функции $\rho \in \text{adm } \Gamma$.

Согласно [9, определение 6.6], семейства кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ будем называть *отделимыми*, если найдутся непересекающиеся борелевские множества $E_i \subset \mathbb{R}^n$ такие, что $\int_\gamma g_i(x) |dx| = 0$ для каждой локально спрямляемой кривой $\gamma \in \Gamma_i$, где g_i – характеристическая функция множества $\mathbb{R}^n \setminus E_i$. Докажем следующее вспомогательное утверждение (см. также [2, лемма 1.3, гл. IV]).

Лемма 1. Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – открытое дискретное отображение с конечным искажением длины, $m : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ – некоторая неотрицательная целочисленная борелевская функция и для каждого $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ запись вида $\beta_y : [s, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ обозначает кривую $\beta_y(u) = uy$. Обозначим через Γ^* семейство кривых, состоящих из $m(y)$ частичных существенно отделимых поднятий кривой β_y при отображении f (предположим, что все эти $m(y)$ поднятий существуют). Тогда для каждой функции $\rho \in \text{adm } \Gamma^*$ выполняется неравенство $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} m(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \leq (\log \frac{t}{s})^{n-1} \int_D K_I(x, f) \cdot \rho^n(x) dm(x)$.

Доказательство. Полагаем $E_k := \{y \in \mathbb{S}^{n-1} : m(y) = k\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\Gamma_k := \{\beta_y : y \in E_k\}$. Пусть также Γ_k^* есть подсемейство кривых Γ^* , для которых соответствующая кривая $\beta_y \in \Gamma_k$. Ввиду предложения 1

$$k \cdot M(\Gamma_k) \leq \int_D K_I(x, f) \cdot \rho^n(x) dm(x) \quad (11)$$

для каждой функции $\rho \in \text{adm } \Gamma_k^*$. Ввиду [9, разд. 7.7],

$$M(\Gamma_k) = \frac{\mathcal{H}^{n-1}(E_k)}{(\log(t/s))^{n-1}}. \quad (12)$$

Заметим, что семейства Γ_k отделимы; тогда $M_{K_I(\cdot, f)}(\Gamma^*) = \sum_{k=0}^{\infty} M_{K_I(\cdot, f)}(\Gamma_k^*)$ (см. [16, пункт (b), с. 176 и пункт (e), с. 178], см. также [17, теорема 15.1,

гл. I]). Тогда суммируя по k соотношение (11) и учитывая при этом соотношение (12), получаем утверждение леммы. \square

Для произвольного дискретного отображения $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ и борелевского множества $E \subset D$ определим так называемую *считающую функцию* по следующему правилу:

$$n(E, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap E} i(x, f),$$

где $i(x, f)$ – локальный топологический индекс (см. [13]). Определим также *интегральное среднее* считающей функции $n(E, \cdot)$ по сфере $S(y, t)$ соотношением

$$\nu(E, y, t) := \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} n(E, y + tx) d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

При $E = B(a, r)$ полагаем $\nu(a, r, y, t) := \nu(E, y, t)$.

Для точки $x_0 \in D$ и чисел $0 < r_1 < r_2 < \infty$ полагаем $A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in D : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$. Аналог следующего результата может быть найден в [2, лемма 1.1, гл. IV] (см. также в [3, лемма 2.6]).

Лемма 2. Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – открытое дискретное отображение с конечным искажением длины, $\theta > 1$, $\overline{B(a, \theta r)} \subset D$, $y \in \mathbb{R}^n$ и $s, t > 0$. Тогда

$$\nu(a, \theta r, y, s) \geq \nu(a, r, y, t) - |\log(t/s)|^{n-1} \cdot \frac{1}{\left(\int_r^{\theta r} \frac{d\omega}{\omega k_a^{\frac{1}{n-1}}(\omega)} \right)^{n-1}},$$

где k_a определено соотношением (1) при $Q := K_I(x, f)$ и $x_0 := a$.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $s < t$ (доказательство в случае $t > s$ проводится аналогично). Для фиксированного $z \in \mathbb{S}^{n-1}$ полагаем $m(z) := \max\{0, n(B(a, r), y + sz) - n(B(a, \theta r), y + tz)\}$. Предположим, что $m(z) > 0$. Ввиду [2, теорема 3.2, гл. II] найдутся $n(B(a, r), y + sz)$ максимальных поднятий кривой $\beta_z = zu$, $u \in (s, t)$, с началом в шаре $\overline{B(a, r)}$ и лежащих в шаре $B(a, \theta r)$. Ввиду той же теоремы, все эти поднятия существенно отделены (см. там же).

Рассмотрим какое-либо из таких поднятий $\alpha : [s, c] \rightarrow B(a, \theta r)$. Если предельное множество кривой α целиком лежит внутри шара $B(a, \theta r)$, то, во-первых, в силу дискретности отображения f оно является одноточечным; во-вторых, в этом случае $f(\alpha(c)) = zt$. Заметим, что общее количество кривых среди $n(B(a, r), y + sz)$ максимальных поднятий кривой β_z , содержащих такую точку $x := \alpha(c)$, не превышает числа $k := \text{card}\{f^{-1}(zt) \cap$

$B(a, \theta r)\} \leq n(B(a, \theta r), y + tz)$. Таким образом, среди $n(B(a, r), y + sz)$ поднятий α , по крайней мере, $n(B(a, r), y + sz) - k \geq m(z)$ кривых не содержат прообразов точки zt при отображении f в шаре $B(a, \theta r)$. Таким образом, $m(z)$ кривых α таковы, что $\text{dist}(\alpha(u), S(a, \theta r)) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow c - 0$.

Ввиду леммы 1 мы получим, что при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и произвольной функции $\rho \in \text{adm } \Gamma(S(a, r), S(a, \theta r - \varepsilon), A(r, \theta r - \varepsilon, a))$

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} m(z) d\mathcal{H}^{n-1}(z) \leq \left(\log \frac{t}{s} \right)^{n-1} \int_D K_I(x, f) \cdot \rho^n(x) dm(x). \quad (13)$$

Полагаем

$$I = I(x_0, r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}, \quad (14)$$

где q_{x_0} определено в (1). Пусть $I = I(a, r, \theta r - \varepsilon) \neq 0$, где I определено в (14) при $Q := K_I(x, f)$, $x_0 := a$, $r_1 := r$ и $r_2 = \theta r - \varepsilon$. (Следует отметить, что $I < \infty$, поскольку $Q \geq 1$). Предположим вначале, что $I > 0$. Полагаем

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/[\omega k_a^{\frac{1}{n-1}}(\omega)] , & \omega \in (r, \theta r - \varepsilon) , \\ 0 , & \omega \notin (r, \theta r - \varepsilon) , \end{cases}$$

где функция $k_a(\omega)$ определена по соотношению (1) при $Q := K_I(x, f)$. Тогда ввиду теоремы Фубини

$$\int_A Q(x) \cdot \psi^n(|x - a|) dm(x) = \omega_{n-1} I, \quad (15)$$

где $A = A(r, \theta r - \varepsilon, a)$. Заметим, что функция $\eta_1(\omega) := \psi(\omega)/I$, $\omega \in (r, \theta r - \varepsilon)$, удовлетворяет соотношению $\int_r^{\theta r - \varepsilon} \eta_1(\omega) d\omega = 1$. С другой стороны, отыщется борелевская функция $\eta(\omega)$ такая, что $\eta_1(\omega) = \eta(\omega)$ при почти всех $\omega \in (\theta, \theta r - \varepsilon)$ (см. [18, разд. 2.3.6]). В таком случае, ввиду [9, теорема 5.7] функция $\rho(x) := \eta(|x - a|) \in \text{adm } \Gamma(S(a, r), S(a, \theta r - \varepsilon), A(r, \theta r - \varepsilon, a))$ и, значит, из (13) и (15) вытекает, что

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} m(z) d\mathcal{H}^{n-1}(z) \leq \left(\log \frac{t}{s} \right)^{n-1} \cdot \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int_r^{\theta r - \varepsilon} \frac{d\omega}{\omega k_a^{\frac{1}{n-1}}(\omega)} \right)^{n-1}}. \quad (16)$$

Заметим, что последнее соотношение справедливо также и в случае, когда $\int_r^{\theta r - \varepsilon} \frac{d\omega}{\omega k_a^{\frac{1}{n-1}}(\omega)} = 0$. Поскольку $Q := K_I(x, f) \geq 1$, функция $\frac{d\omega}{\omega k_a^{\frac{1}{n-1}}(\omega)}$ является

интегрируемой по ω на $(r, \theta r)$ и, значит, по теореме об абсолютной непрерывности интеграла (см. [17, теорема 13.2, гл. I]) $\frac{\omega_{n-1}}{\int_r^{\theta r - \varepsilon} \frac{d\omega}{\omega k_a^{\frac{1}{n-1}}(\omega)}} \rightarrow \frac{\omega_{n-1}}{\int_r^{\theta r} \frac{d\omega}{\omega k_a^{\frac{1}{n-1}}(\omega)}}$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, из (16) вытекает, что

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} m(z) d\mathcal{H}^{n-1}(z) \leq \left(\log \frac{t}{s} \right)^{n-1} \cdot \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int_r^{\theta r} \frac{d\omega}{\omega k_a^{\frac{1}{n-1}}(\omega)} \right)^{n-1}}. \quad (17)$$

Обозначим далее символом E множество $E := \{y \in \mathbb{S}^{n-1} : m(y) > 0\}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^{n-1}} n(B(a, \theta r), y + tz) d\mathcal{H}^{n-1}(z) = \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1} \setminus E} n(B(a, \theta r), y + tz) d\mathcal{H}^{n-1}(z) + \int_E n(B(a, \theta r), y + tz) d\mathcal{H}^{n-1}(z) \geq \\ &\geq \int_{\mathbb{S}^{n-1} \setminus E} n(B(a, r), y + sz) d\mathcal{H}^{n-1}(z) + \int_E n(B(a, r), y + sz) d\mathcal{H}^{n-1}(z) - \\ &\quad - \int_E m(z) d\mathcal{H}^{n-1}(z) = \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} n(B(a, r), y + sz) d\mathcal{H}^{n-1}(z) - \int_{\mathbb{S}^{n-1}} m(z) d\mathcal{H}^{n-1}(z). \end{aligned} \quad (18)$$

По определению величины ν из (17) и (18) вытекает, что $\nu(a, \theta r, y, tz) \geq \nu(a, r, y, sz) - \left(\log \frac{t}{s} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\left(\int_r^{\theta r} \frac{d\omega}{\omega k_a^{\frac{1}{n-1}}(\omega)} \right)^{n-1}}$, что и требовалось установить. \square

Аналог следующего утверждения для отображений с конечным искажением доказан в работе [3, лемма 2.7].

Лемма 3. Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – отображение с конечным искажением длины, E и F – непересекающиеся множества, лежащие в шаре $\overline{B(a, R)}$ такие, что $f(E) \subset B(z, s)$, $f(F) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(z, t)}$, $s < t$. Пусть также при некотором $\theta > 1$ имеет место включение $\overline{B(a, \theta R)} \subset D$. Тогда, если Γ – семейство всех кривых, соединяющих E и F в шаре $B(a, R)$ и, кроме того, $K_O(x, f) \leq Q(x)$ почти всюду при некоторой измеримой функции

$Q : D \rightarrow [1, \infty]$, то

$$M_{1/Q}(\Gamma) \leq \omega_{n-1} \left(\frac{\nu(a, \theta R, z, t)}{\log^{n-1}(t/s)} + \frac{1}{\left(\int_R^{\theta R} \frac{d\omega}{\omega \tilde{q}_a^{\frac{1}{n-1}}(\omega)} \right)^{n-1}} \right),$$

где $\tilde{q}_a(\omega)$ – среднее интегральное значение функции Q^{n-1} на сфере $S(a, \omega)$.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $z = 0$. Выберем $\rho \in \text{adm } f(\Gamma)$, полагая

$$\rho(y) = \begin{cases} \frac{1}{\log(t/s)|y|}, & s < |y| < t, \\ 0, & y \in \mathbb{R}^n \setminus A(s, t, 0). \end{cases}$$

По теореме 2

$$\begin{aligned} M_{1/Q}(\Gamma) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho^n(y) n(B(a, R), y) dm(y) = \\ &= \frac{1}{\log^n(t/s)} \cdot \int_s^t \frac{1}{r^n} \int_{S(0, r)} n(B(a, R), y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) dr = \\ &= \frac{1}{\log^n(t/s)} \cdot \int_s^t \frac{1}{r} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} n(B(a, R), ry) d\mathcal{H}^{n-1}(y) dr = \\ &= \frac{\omega_{n-1}}{\log^n(t/s)} \cdot \int_s^t \frac{1}{r} \cdot \nu(a, R, 0, r) dr. \end{aligned} \tag{19}$$

По лемме 2 с учётом неравенств (10) для всякого $r \in (s, t)$

$$\nu(a, R, 0, r) \leq \nu(a, \theta R, 0, t) + (\log(t/s))^{n-1} \cdot \frac{1}{\left(\int_R^{\theta R} \frac{d\omega}{\omega \tilde{q}_a^{\frac{1}{n-1}}(\omega)} \right)^{n-1}},$$

где $\tilde{q}_a(\omega)$ обозначает среднее интегральное значение функции Q^{n-1} на сфере $S(a, \omega)$. Тогда из соотношений в (19) мы получаем необходимое заключение. \square

3 Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 1. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $b = 0$. Полагаем $E = \gamma([0, 1))$. Поскольку $b = 0$ – асимптотический предел отображения f в бесконечности, найдётся число $R > 0$ такое, что $f(E \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(0, R))) \subset \mathbb{B}^n$. Рассмотрим кривую $\beta(t) = y_0 t$, $t \in [1, \infty)$, где y_0 таково, что $|y_0| := \max_{x \in B(0, R)} |f(x)| = |f(x_0)|$, $x_0 \in S(0, R)$ и $y_0 \in S(0, M_f(R))$. Не ограничивая общности, можно считать, что $M_f(R) > 1$. Поскольку f – дискретное и открытое отображение, существует максимальное поднятие $\alpha : [1, c) \rightarrow \mathbb{R}^n$ кривой β в \mathbb{R}^n с началом в точке x_0 (см. [2, теорема 3.2, гл. II]). Пусть F_R – компонента связности множества $f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0, M_f(R))})$, содержащая эту кривую $\alpha|_{(0, c)}$, тогда $x_0 \in \overline{F_R} \cap S(0, R) \neq \emptyset$ и $\alpha(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow c - 0$. (В частности, отсюда следует, что компонента F_R неограничена). Заметим, что $(E \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(0, R))) \cap F_R = \emptyset$. Ввиду леммы 3 для семейства кривых Γ , соединяющих множества E и F_R в кольце $B(0, \theta R) \setminus B(0, R)$, мы будем иметь, что при $K > 1$

$$\nu(0, K\theta R, 0, 1) \geq \frac{\log^{n-1} M_f(R)}{\omega_{n-1}} \left(M_{1/Q}(\Gamma) - \frac{1}{\left(\int_{\theta R}^{K\theta R} \frac{d\omega}{\omega \tilde{q}_0^{\frac{n-1}{n-1}}(\omega)} \right)^{n-1}} \right), \quad (20)$$

где $\tilde{q}_0(\omega)$ – среднее интегральное значение функции $Q^{n-1}(x)$ на сфере $S(0, \omega)$. Из теоремы 3 вытекает, что при $\theta > \theta_1$ и $R > R_0$

$$\begin{aligned} M_{1/Q}(\Gamma) &\geq \frac{C_{n,\alpha}}{\frac{\theta^n R^n}{\theta^n R^n - R^n} \left(\frac{1}{\theta^n R^n - R^n} \int_{B(0, \theta R) \setminus B(0, R)} Q^\alpha(x) dm(x) \right)^{1/\alpha}} \geq \\ &\geq \frac{C_{n,\alpha}}{\frac{C_0}{\theta^n R^n} \int_{B(0, \theta R)} Q^\alpha(x) dm(x)}. \end{aligned}$$

Тогда из (20), учитывая условия (2) и (3) (при $\theta \geq \theta_2$ и $K \geq K_0$, где K_0 – некоторое достаточно большое число), получаем

$$\nu(0, K\theta R, 0, 1) \geq C_1 \cdot \log^{n-1} M_f(R) \quad (21)$$

при некоторой постоянной $C_1 > 0$. Правая часть последнего соотношения никак не зависит от параметров K и θ , поэтому произведя переобозначения в (21), мы будем иметь

$$\nu(0, \theta R, 0, 1) \geq C_1 \cdot \log^{n-1} M_f(R) \quad (22)$$

для произвольного $\theta \geq \theta_3 > 1$. С другой стороны, поскольку f – открытое отображение, никакая точка сферы $S(0, M_f(R))$ не является образом точки открытого шара $B(0, R)$ при отображении f и, значит,

$$\nu(0, K\theta R, 0, M_f(K\theta R)) = 0$$

для произвольного $K > 1$. Тогда (по лемме 2) $0 = \nu(0, K\theta R, 0, M_f(K\theta R)) \geq$

$$\geq \nu(0, \theta R, 0, 1) - \log M_f^{n-1}(K\theta R) \cdot \frac{1}{\left(\int_{\theta R}^{K\theta R} \frac{d\omega}{\omega \tilde{q}_0^{\frac{1}{n-1}}(\omega)} \right)^{n-1}}.$$

Отсюда и из условия (3) вытекает, что при всех $K \geq K_1$, $\theta \geq \theta_4 > 1$ и $R > R_0$

$$\nu(0, \theta R, 0, 1) \leq C_1/2 \cdot \log^{n-1} M_f(K\theta R). \quad (23)$$

Из (22) и (23) следует, что при $\theta \geq \max\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$, $R > R_0$ и $K \geq K_2$

$$\log^{n-1} M_f(K\theta R) \geq 2 \cdot \log^{n-1} M_f(R). \quad (24)$$

Выписывая соотношение (24) для последовательности $R_0 = R$, $R_1 = K\theta R$, \dots , $R_m = K^m \theta^m R$, \dots мы получим:

$$\log^{n-1} M_f(K^m \theta^m R) \geq \dots \geq 2^m \cdot \log^{n-1} M_f(R),$$

откуда $(n-1) \log \log M_f(K^m \theta^m R) \geq m \log 2 + (n-1) \log \log M_f(R)$ и

$$(n-1) \frac{\log \log M_f(K^m \theta^m R)}{\log R_m} \geq \frac{m \log 2}{m \log(K\theta) + \log R} + (n-1) \frac{\log \log M_f(R)}{m \log(K\theta) + \log R}.$$

Отсюда пока что следует, что для любой подпоследовательности номеров m_k , для которой предел левой части последнего соотношения существует, выполнено

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (n-1) \frac{\log \log M_f(R_{m_k})}{\log R_{m_k}} \geq \frac{\log 2}{\log(K\theta)} > 0. \quad (25)$$

Нам осталось показать, что ни для какой другой последовательности x_k , для которой предел $\lim_{k \rightarrow \infty} (n-1) \frac{\log \log M_f(x_k)}{\log x_k}$ существует, он не может быть меньше величины, стоящей в правой части (25). Итак, пусть x_k – такая последовательность, тогда по индукции построим подпоследовательности номеров k_l и m_l такие, что $K^{m_l} \theta^{m_l} R \leq x_{k_l} \leq K^{m_l+1} \theta^{m_l+1} R$. Не ограничивая общности, можно считать, что предел $\lim_{l \rightarrow \infty} (n-1) \frac{\log \log M_f(K^{m_l} \theta^{m_l} R)}{\log K^{m_l} \theta^{m_l} R}$ также существует. В этом случае, ввиду (25) мы получим, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (n-1) \frac{\log \log M_f(x_{m_l})}{\log x_{m_l}} \geq \lim_{l \rightarrow \infty} (n-1) \frac{\log \log M_f(K^{m_l} \theta^{m_l} R)}{\log K^{m_l} \theta^{m_l} R + \log K\theta} = \frac{\log 2}{\log(K\theta)}.$$

Теорема 1 полностью доказана. \square

4 Несколько слов о сравнении результатов работы с более ранними результатами

Не вдаваясь в подробный сравнительный анализ полученных в настоящей статье утверждений по отношению к результатам недавно вышедшей работы К. Райала [3], укажем на следующие обстоятельства, подчёркивающие их новизну. В отличие от условия типа (2), в работе [3] основным условием аналогичного вида является требование

$$\frac{1}{m(B(0, t))} \int_{B(0, t)} \exp(\Phi(K_O(x, f))) dm(x) \leq A,$$

где $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – строго возрастающая дифференцируемая функция, такая что $\int_1^\infty \frac{\Phi'(t)}{t} dt = \infty$, $t \cdot \Phi'(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ и $\exp(\Phi(K_O(x, f))) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. Из указанных условий, в частности, вытекает, что внешняя дилатация отображения $K_O(x, f)$ должна быть локально суммируема в любой степени $\alpha > 0$ и её среднее значение, взятое в этой степени, по сколь угодно большим шарам должно быть ограничено.

Однако, нетрудно построить пример внешней дилатации $Q := K_O(x, f)$, для которой выполнены условия (2) и (3) (более того, $\tilde{q}_{\alpha, 0}(r) \leq C = const$, где $\tilde{q}_{\alpha, 0}(r)$ – среднее значение $Q^\alpha(x)$ по сфере $S(0, r)$, $\alpha > n - 1$), однако, в то же время, средние значения от функции $Q_\varepsilon(x) := Q^{\alpha\varepsilon}(x)$, $\varepsilon > 1$, по шарам сколь угодно большого радиуса не ограничены. Для этого в \mathbb{R}^n рассмотрим при произвольном $r > 0$ телесный угол $\gamma(r)$ симметричный относительно какой-либо фиксированного луча l , исходящего из нуля. Обозначим часть сферы $S(0, r)$, которая ограничена данным телесным углом, символом $M(r)$. (Потребуем дополнительно, чтобы функция $\gamma(r)$ была измерима по r). По определению, $\gamma(r) = \frac{\mathcal{H}^{n-1}(M(r))}{r^{n-1}}$ (в частности, $0 \leq \mathcal{H}^{n-1}(M(r)) \leq \omega_{n-1}r^{n-1}$ и $0 \leq \gamma(r) \leq \omega_{n-1}$). Полагаем теперь для фиксированной измеримой по Лебегу функции $\psi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ (такой что $\psi(r) \equiv 1 \quad \forall r \in (0, 1)$) $Q^\alpha(x) := \psi(|x|)$ при $x \in M(r)$, $|x| = r$, и $Q^\alpha(x) = 0$ в противном случае. Тогда $\tilde{q}_{\alpha, 0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}}\gamma(r)\psi(r)$,

$$\frac{1}{m(B(0, R))} \int_{B(0, R)} Q^\alpha(x) dm(x) = \frac{1}{\Omega_n R^n} \int_0^R \psi(r) \gamma(r) r^{n-1} dr$$

и

$$\frac{1}{m(B(0, R))} \int_{B(0, R)} Q^{\alpha\varepsilon}(x) dm(x) = \frac{1}{\Omega_n R^n} \int_0^R \psi^\varepsilon(r) \gamma(r) r^{n-1} dr.$$

Полагаем теперь при $r \geq 1$: $\psi(r) = r$, $\gamma(r) = \omega_{n-1}/r$. Мы видим в этом случае, что $\tilde{q}_{\alpha,0}(r) \leq C_1 = \text{const}$, $\frac{1}{m(B(0,R))} \int_{B(0,R)} Q^\alpha(x) dm(x) \leq C_2 = \text{const}$, однако, $\frac{1}{m(B(0,R))} \int_{B(0,R)} Q^{\alpha\varepsilon}(x) dm(x) \rightarrow \infty$ при $R \rightarrow \infty$. Таким образом, построен пример внешней дилатации $K_O(x, f)$, удовлетворяющий при $Q := K_O(x, f)$ условиям (2) и (3), но не удовлетворяющий требованию $\frac{1}{m(B(0,t))} \int_{B(0,t)} \exp(\Phi(K_O(x, f))) dm(x) \leq A = \text{const}$ ($\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – произвольная строго возрастающая дифференцируемая функция, такая что $t \cdot \Phi'(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$).

Результаты работы могут применены к различным классам плоских и пространственных отображений (см., напр., [4], [5],[6], [7], [19] и [20]).

Список литературы

- [1] Rickman S., Vuorinen M. On the order of quasiregular mappings // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* 1982. V. 7, N. 2. P. 221–231.
- [2] Rickman S. Quasiregular mappings. Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [3] Rajala K. Mappings of finite distortion: the Rickman-Picard theorem for mappings of finite lower order // *J. d'Anal. Math.* 2004. V. 94. P. 235–248.
- [4] Iwaniec T. and Martin G. Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis. Oxford: Clarendon Press, 2001.
- [5] Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in modern mapping theory. New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
- [6] Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. Mappings with finite length distortion // *J. d'Anal. Math.* 2004. V. 93. P. 215–236.
- [7] Gutlyanskii V. Ya., Ryazanov V. I., Srebro U., Yakubov E. The Beltrami Equation: A Geometric Approach. Developments in Mathematics, vol. 26. New York etc.: Springer, 2012.
- [8] Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
- [9] Väisälä J. Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings. Lecture Notes in Math. 229. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.

- [10] *Manfredi J.J. and Villamor E.* Mappings with integrable dilatation in higher dimensions // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1995. V. 32, N. 2. P. 235–240.
- [11] *Manfredi J.J. and Villamor E.* An extension of Reshetnyak’s theorem // *Indiana Univ. Math. J.* 1998. V. 47, N. 3. P. 1131–1145.
- [12] *Севостьянов Е.А.* Обобщение одной леммы Е.А. Полецкого на классы пространственных отображений // *Укр. матем. ж.* 2009. Т. 61, N. 7. С. 969–975.
- [13] *Rado T. and Reichelderfer P.V.* Continuous Transformations in Analysis. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1955.
- [14] *Caraman P.* Relations between p -capacity and p -module (I) // *Rev. Roum. Math. Pures Appl.* 1994. V. 39, N. 6. P. 509–553.
- [15] *Sevost’yanov E.A.* The Väisälä inequality for mappings with finite length distortion // *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2010. V. 55, N. 1–3. P. 91–101.
- [16] *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // *Acta Math.* 1957. V. 98. P. 171–219.
- [17] *Сакс С.* Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.
- [18] *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. Москва: Наука, 1987.
- [19] *Bishop C.J., Gutlyanskiĭ V.Ya., Martio O. and Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // *Int. J. Math. Math. Sci.* 2003. V. 22. P. 1397–1420.
- [20] *Golberg A. and Salimov R.* Topological mappings of integrally bounded p -moduli // *Ann. Univ. Buchar. Math. Ser.* 2012. V. 3(LXI), N. 1. P. 1–18.

КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Евгений Александрович Севостьянов

Институт прикладной математики и механики НАН Украины
 83 114 Украина, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, д. 74,
 раб. тел. 8-380-62-311 01 45,
 e-mail: brusin2006@rambler.ru, esevostyanov2009@mial.ru